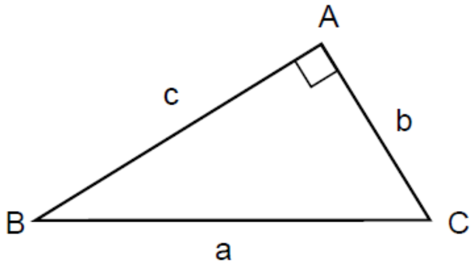
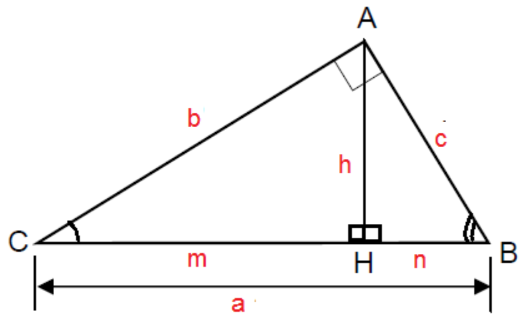
TRIÂNGULO RETÂNGULO

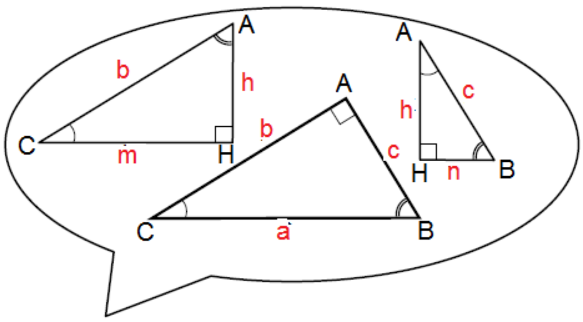
I – Introdução

Seja ABC um triângulo retângulo em A. Isso implica que A = 90º, que AB e AC são os catetos e que BC é a hipotenusa.



Traçando a altura do vértice A em relação à hipotenusa, dividiremos o triângulo em dois outros semelhantes.





$\Delta HAC \sim \Delta ABC \sim \Delta HBA$

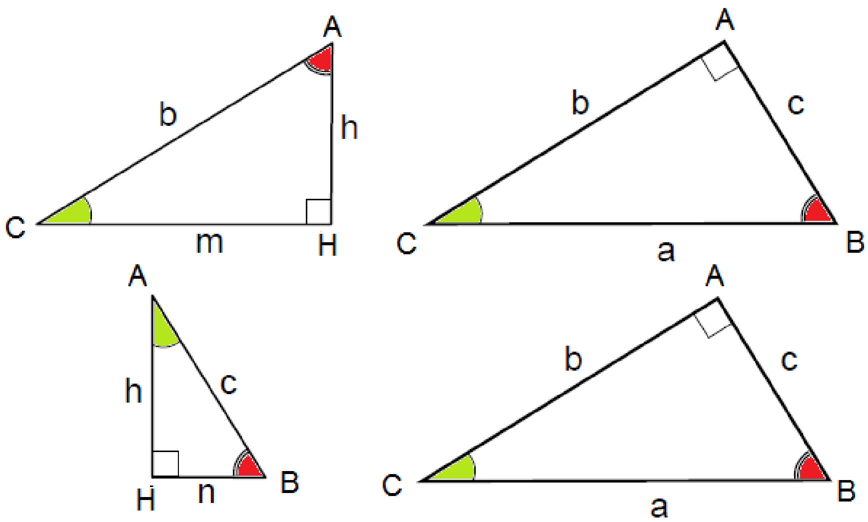
Chamemos:

1) a altura relativa à hipotenusa AH, de h;

2) as projeções dos catetos sobre a hipotenusa HC e BH, de m e n.

Usando a semelhança dos três triângulos temos:

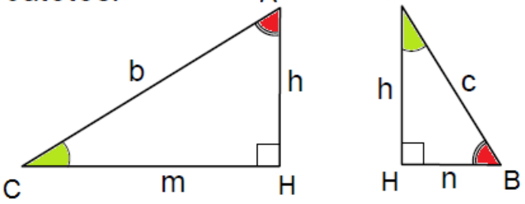
1) *O quadrado de um cateto é sempre o produto da hipotenusa por sua projeção.*



$$\frac{m}{b} = \frac{b}{a} \Rightarrow \boxed{b^2 = a.m}$$

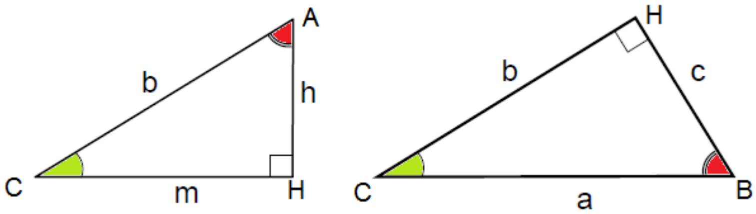
$$\frac{c}{n} = \frac{a}{c} \Rightarrow \boxed{c^2 = a.\,n}$$

2) *O quadrado da altura (relativa à hipotenusa) é igual ao produto das projeções dos catetos.*



$$\frac{h}{n} = \frac{m}{h} \Rightarrow \boxed{h^2 = m.n}$$

3) *O produto da hipotenusa pela altura é igual ao produto dos catetos.*



$$\frac{h}{c} = \frac{b}{a} \Rightarrow \boxed{ah = bc}$$

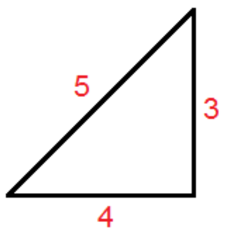
4) *Principal relação*: **Teorema de Pitágoras**

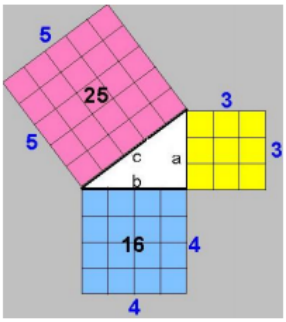
Mostramos que $b^2 = am$ e que $c^2 = na$, então $b^2 + c^2 = am + an = a(m + n)$

Como $(m + n) = a \Rightarrow$ $b^2 + c^2 = a \cdot a$ $\Rightarrow$ $\mathbf{a^2 = b^2 + c^2}$

Ou seja: "*o quadrado da hipotenusa é igual a soma dos quadrados dos catetos.*"

Exemplo:



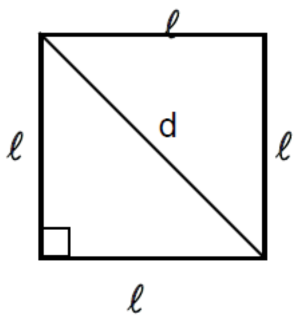


Isso equivale dizer: A área do quadrado construído sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos.

$$\boxed{\begin{array}{c} 5^2 = 3^2 + 4^2 \\ \Downarrow \\ 25 = 9 + 16 \end{array}}$$

A diagonal do quadrado e altura do triângulo eqüilátero são duas importantes aplicações desse teorema.

1) Diagonal do Quadrado: Seja d a diagonal de um quadrado de lado ℓ.

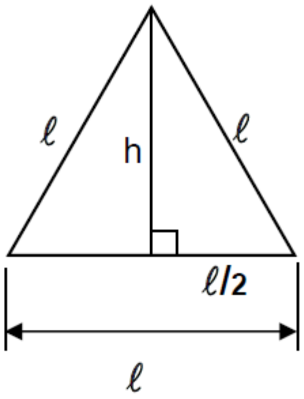


$d^2 = \ell^2 + \ell^2$

$d^2 = 2\ell^2$

$d = \sqrt{2\ell^2}$ então $\boxed{d = \ell\sqrt{2}}$

2) Altura do Triângulo Eqüilátero: Seja h a altura de um triângulo equilátero de lado ℓ



$$h^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \ell^2$$

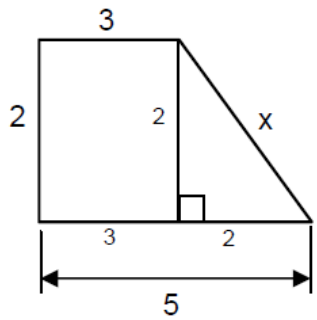
$$h^2 = \ell^2 - \frac{\ell^2}{4}$$

$$h^2 = \frac{3\ell^2}{4}$$

$$h = \sqrt{\frac{3\ell^2}{4}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}}$$

Exemplos

1. Em um trapézio retângulo de bases 5 e 3, a altura é igual a 2. Quanto mede o lado oblíquo às bases ?

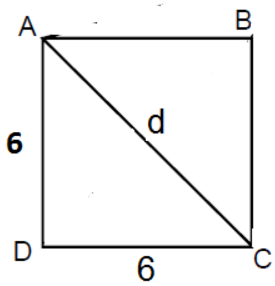


Ao traçarmos a altura construímos um Triângulo retângulo. Então:

$x^2 = 2^2 + 2^2 \Rightarrow x^2 = 8$ Então $x = \sqrt{8} \Rightarrow x = \sqrt{2.4}$

$x = \sqrt{4}\,.\sqrt{2} \Rightarrow$ Logo $x = 2\sqrt{2}$

2. A figura abaixo, um quadrado ABCD, de lado 6 cm tem como diagonal o segmento AC. Qual o valor dessa diagonal?



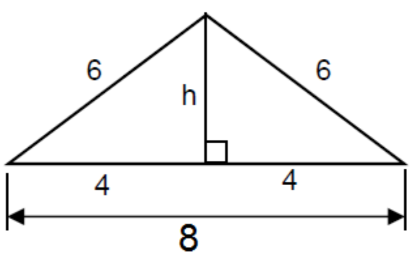
$d^2 = 6^2 + 6^2 \Rightarrow d^2 = 36 + 36 \Rightarrow d^2 = 2\,.\,36$

$d = \sqrt{2\,.\,36} \Rightarrow d = \sqrt{36}\,.\,\sqrt{2} \Rightarrow d = 6\sqrt{2}$

ou

$d = \ell\sqrt{2} \Rightarrow d = 6\sqrt{2}$

3. Calcule a altura de um triângulo isósceles de base igual a 8cm e cujos lados congruentes medem 6cm.



No triângulo isósceles, a altura traçada do vértice formado pelos lados iguais, coincide com a mediana e bissetriz, portanto, cada triângulo retângulo obtido tem h e 4 como catetos e hipotenusa igual a 6.

Então: $h^2 + 4^2 = 6^2 \Rightarrow h^2 = 36 - 16$

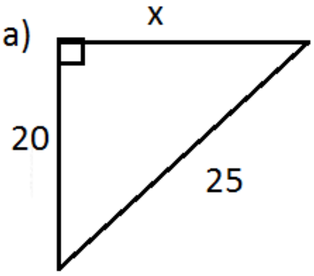
$h^2 = 20 \Rightarrow h = \sqrt{20} \Rightarrow h = \sqrt{4\,.\,5} \Rightarrow h = \sqrt{4}\,.\,\sqrt{5}$

$h = 2\sqrt{5}$

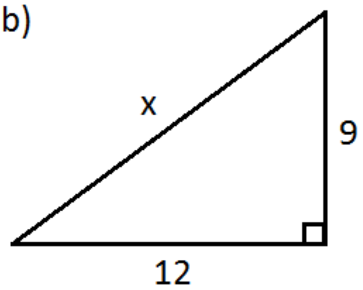
EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1- Calcule o valor de x nos triângulos abaixo:

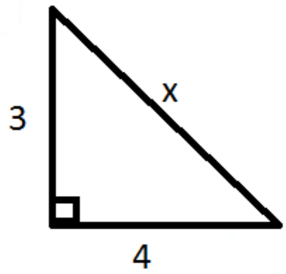
a)



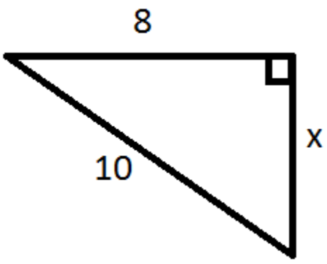
b)



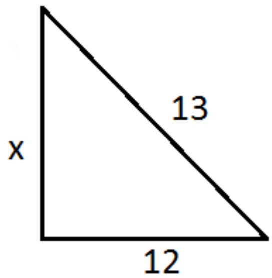
c)



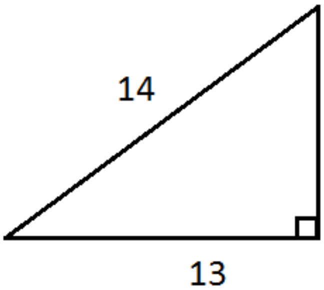
d)



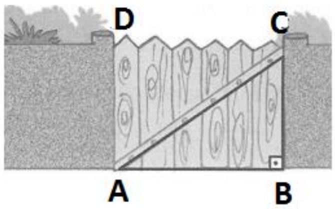
e)



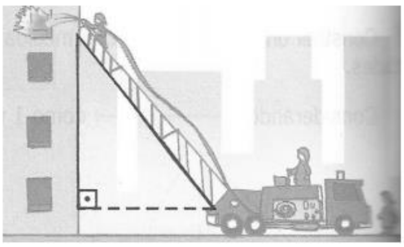
f)



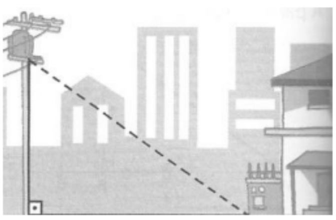
2- **Abaixo, o portão de entrada de uma casa tem 4m de comprimento e 3m de altura. Que comprimento teria uma trave de madeira que se estendesse do ponto A até o C?**



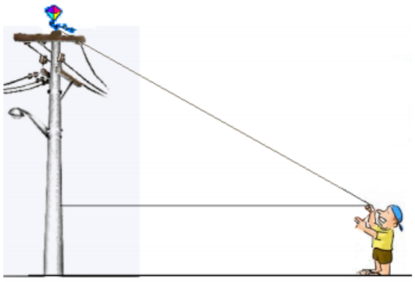
3- Durante um incêndio num edifício de apartamentos, os bombeiros utilizaram uma escada de 10m para atingir a janela do apartamento em fogo. A escada estava colocada a 1m do chão e afastada 6m do edifício. Qual é a altura do edifício em chamas em relação ao chão?



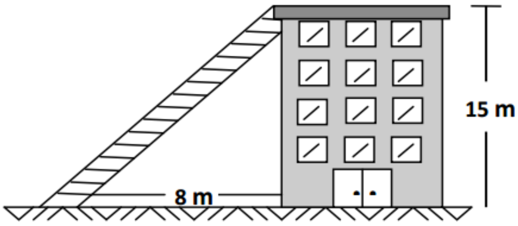
4- Quantos metros de fio são necessários para “puxar luz” de um poste de 6m de altura até a caixa de luz que está ao lado da casa e a 8m da base do poste?



5- A distância do menino ao poste é de 12 metros, sabendo que o menino tem 1,60m e a altura do poste é de 6,60m, a que distância está a pipa do menino?

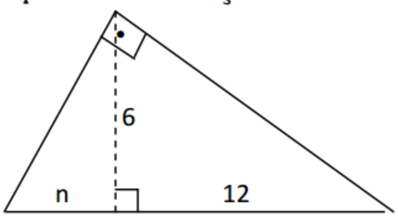


6- A figura mostra um edifício que tem 15 m de altura, com uma escada colocada a 8 m de sua base ligada ao topo do edifício. O comprimento dessa escada é de:

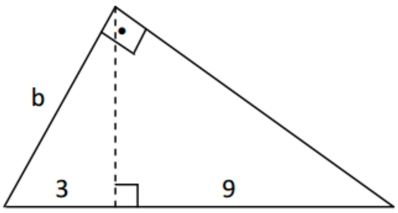


7- Aplicando as relações métricas nos triângulos retângulos abaixo, determine o valor de **x**:

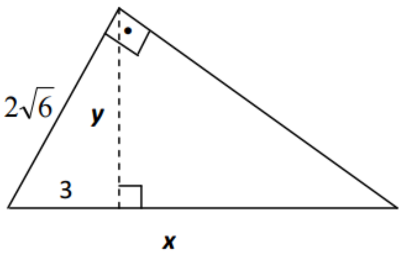
a)



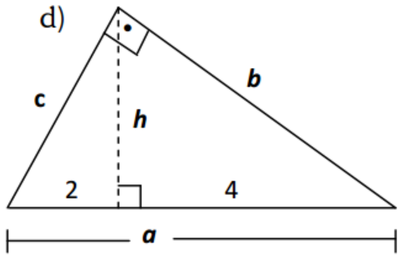
b)



c)



d)



8- Em um triângulo retângulo as projeções dos catetos sobre a hipotenusa medem 6 cm e 8 cm. Determine a altura relativa à hipotenusa desse triângulo.

9- A medida da altura relativa À hipotenusa de um triângulo retângulo é 12 cm e uma das projeções mede 9 cm. Calcular a medida dos catetos desse triângulo.

10- Determine a medida das projeções em um triângulo retângulo cuja hipotenusa mede 12 cm e um dos catetos 4 cm.

11- Em um triângulo retângulo a altura relativa à hipotenusa mede 12 cm e a diferença entre as medidas das projeções dos catetos sobre a hipotenusa é 7 cm. A hipotenusa desse triângulo mede: